Утверждены
на заседании Центральной предметно-методической комиссии
Всероссийской олимпиады школьников по математике
(протокол № 2 от 03.06.2016 г.)

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников в 2016/2017 учебном году по математике

Содержание

Введение

Согласно введенному в 2013 году Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников (далее – Олимпиада, приказ Минобрнауки России № 1252 от 18 ноября 2013 г., с изменениями № 249 от 17 марта 2015 г., № 1488 от 17 декабря 2015 г.), сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы. Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам.

Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь региональным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения муниципального этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания муниципального этапа, описание подходов к разработке заданий региональными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы комплектов олимпиадных заданий для проведения муниципального этапа олимпиады с решениями. В них включены задачи, предлагавшиеся на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны, либо включенные в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016/2017 учебном году утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 03 июня 2016 года).

Основные задачи

На муниципальном этапе происходят изменения в целях Олимпиады. Она теперь направлена не только на популяризацию математики и математических знаний. Анализ ее результатов позволяет сравнивать качество работы с учащимися в различных школах, устанавливать уровень подготовки учащихся всего региона, определять направления работы с одаренными школьниками в регионе. При этом усиливается стимулирующая роль Олимпиады, когда у ее участника появляется возможность сравнения своих математических способностей и олимпиадных достижений не только с учащимися своей школы. Участники получают дополнительные стимулы для регулярных занятий математикой в кружках и на факультативах. Кроме того, муниципальный этап олимпиады является серьезным отборочным соревнованием, поскольку по его итогам из большого числа сильнейших школьников различных муниципальных образований формируется состав участников регионального этапа.

Соответственно меняется и характер заданий олимпиады. Они предполагают знакомство участников со спецификой олимпиадных задач по математике: умение строить цепочки логических рассуждений, доказывать утверждения. Стилистически задания еще в большей, по сравнению со школьным этапом, степени начинают отличаться от заданий повышенной трудности, включаемых в школьные учебники по математике, что предполагает психологическую готовность участников олимпиады к таким заданиям. Наконец, большое количество обладающих математическими способностями участников муниципального этапа олимпиады (в особенности в крупных муниципальных образованиях) предполагает заметно более высокий уровень сложности заданий.

Таким образом, основными целями муниципального этапа олимпиады являются формирование и закрепление интереса математически способных обучающихся к регулярным дополнительным занятиям математикой; повышение качества работы учителей математики в школах и развитие системы работы с одаренными детьми в регионе, отбор наиболее способных школьников в каждом муниципальном образовании, формирование регионального списка наиболее одаренных учащихся.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на муниципальном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Олимпиада проводится для учащихся параллелей 7-11 классов. Рекомендуется проведение муниципального этапа олимпиады и для параллелей 5 и 6 классов, в особенности в тех регионах, где развита система дополнительного образования (например, проводятся кружки при университетах). Кроме того, согласно п. 38 Порядка проведения Всероссийской олимпиады школьников, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы по отношению к тем, в которых они проходят обучение, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

Согласно Порядку проведения Всероссийской олимпиады школьников, на муниципальном этапе олимпиады принимают участие участники школьного этапа олимпиады текущего учебного года, набравшие необходимое для участия в муниципальном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором муниципального этапа олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призерами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Вышесказанное означает недопустимость ограничения числа участников Олимпиады от одного образовательного учреждения.

Рекомендуемая продолжительность олимпиады: для учащихся 5 и 6 классов – 3 часа; для учащихся 7-11 классов – 4 часа.

Во время Олимпиады участники:

должны соблюдать установленный порядок проведения Олимпиады;

должны следовать указаниям организаторов;

не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории;

не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой.

При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета соответствующего этапа Олимпиады такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Олимпиада должна проходить как абсолютно объективное, беспристрастное и честное соревнование с высоким уровнем качества проверки работ участников и удобными условиями работы для участников. Для достижения этих целей:

а) Требуется выполнение олимпиадных работ в тетрадях в клетку в силу того, что на математических олимпиадах предлагаются задачи на разрезание фигур, задачи на клетчатых досках, задачи, требующие построения рисунков и графиков.

б) Работы участников перед проверкой обязательно шифруются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра (например 9-01, 9-02, …) на обложке тетради и на первой беловой странице с последующим снятием обложки и ее отдельным хранением до окончания проверки. Расшифровка работ осуществляется **после** составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призеров олимпиады.

в) В состав жюри олимпиады наряду с лучшими учителями необходимо включение преподавателей университетов, а также студентов и аспирантов, успешно выступавших на олимпиадах высокого уровня. Недопустимой является практика невключения в состав методических комиссий и жюри квалифицированных специалистов, непосредственно ведущих работу с одаренными детьми.

г) После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. Жюри олимпиады не вправе «защищать честь мундира» и отказывать участнику олимпиады в исправлении оценки его работы в ситуации, когда реально требуется ее повышение. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

д) По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели.. Количество победителей и призеров муниципального этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором муниципального этапа Олимпиады. Отметим, что в каждой из параллелей победителями могут стать несколько участников.

Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для муниципального этапа

Задания муниципального этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным хотя бы по одному из базовых учебников по математике, алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить большинству Участников возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись около 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.
4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.
5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.
6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 5-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на

свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

7. Желательно составление заданий олимпиады из **новых** задач, специально подготовленных методической комиссией для олимпиады. В случае, если задания олимпиады подбираются из печатных изданий и Интернет-ресурсов, необходимо, чтобы эти источники были неизвестны участникам Олимпиады. Олимпиада должна выявлять не энциклопедичность знаний Участника, а его математические способности.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри. Такая организация проверки рекомендуется для регионов с невысокой плотностью населения.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.

2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Описание необходимого материально-технического обеспечения для выполнения олимпиадных заданий

Тиражирование заданий осуществляется с учетом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, черно-белая печать. Допускается выписывание условий заданий на доску.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуется тетрадь в клетку. Рекомендуется выдача отдельных листов для черновиков. Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады

Выполнение заданий математических олимпиад не предполагает использование каких-либо справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

Участникам во время проведения олимпиады запрещено иметь при себе любые электронные вычислительные устройства или средства связи (в том числе и в выключенном виде), учебники, справочные пособия.

Тематика заданий муниципального этапа олимпиады

Ниже приведена тематику олимпиадных заданий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Типовые задания муниципального этапа олимпиады

Приведенные типовые задания муниципального этапа олимпиады не могут в одинаковой степени устанавливать планку сложности для всех регионов, в силу заметной разницы в уровне развития в различных регионах олимпиадного движения, наличия или отсутствия развитой системы городских математических кружков, наличия в городах сильных математических школ и т.п.. Региональным методическим комиссиям при разработке заданий Олимпиады следует учитывать территориальную специфику. Предлагаемые задания демонстрируют типовую структуру заданий муниципального этапа олимпиады, примерный (усредненный) уровень их сложности, тематику.

Условия задач

5 класс

5.1. Петя бегает в два раза быстрее Коли и в три раза быстрее Маши. На беговой дорожке стадиона Петя, Коля и Маша стартовали одновременно. Петя добежал до финиша на 12 секунд раньше Коли. А на сколько секунд Петя прибежал раньше Маши?

5.2. Запишите числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 (то есть все числа от 1 до 9, кроме 7) в строку так, чтобы в любой паре соседних чисел одно делилось бы на другое.

5.3. Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на 5 квадратов, среди которых по крайней мере четыре имеют разные размеры?

5.4. За круглым столом сидят 10 человек, некоторые из них – рыцари, а остальные – лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждый из сидящих сказал:

«Оба моих соседа – лжецы». Затем один человек ушел из-за стола. Могло ли оказаться, что после этого каждый из оставшихся за столом сказал: «Оба моих соседа – рыцари»? (Ложным считается утверждение, которое хотя бы частично не является верным).

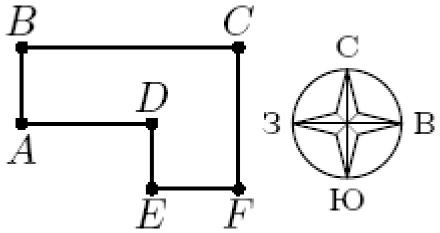
5.5. На уроке физкультуры учитель для эстафет разбивает всех учеников класса на равные группы, а те ученики, из которых нельзя сформировать полную группу, помогают ему судить эстафету. В классе 30 учеников. Первая эстафета была для групп по 4 ученика (соответственно, двое помогали судить), вторая – по 5 учеников (учитель судил один), третья – по 6, и т. д., последняя – по 13. Могло ли оказаться, что каждый ученик участвовал по крайней мере в 9 эстафетах (не в качестве судьи)?

6 класс

6.1. В двузначном числе A поменяли цифры местами и получили число B. Найдите такое A, чтобы сумма $A+B$ делилась на 17.

6.2. На листке написано слово КОРОБКА. Разрешается взять любые две соседние буквы, поменять их местами и одну из этих двух букв заменить на любую другую. Как за пять таких операций превратить слово КОРОБКА в слово БАРАБАН?

6.3. В парке все велосипедные дорожки идут с севера на юг или с запада на восток. Петя и Коля одновременно стартовали из точки A и проехали на велосипедах с постоянными скоростями: Петя – по маршруту $A-B-C$, Коля – по маршруту $A-D-E-F-C$ (см. рис), причем оба затратили на дорогу по 12 минут. Известно, что Коля ездит в 1,2 раза быстрее Пети. Сколько времени Коля ехал по участку DE? На рисунке масштаб не соблюден.



6.4. Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ плитками двух типов: 2×2 и 2×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

6.5. За круглый стол сели 12 человек, некоторые из них – рыцари, а остальные – лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Затем каждый из них сказал:

«Среди моих соседей есть лжец». Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Среди моих соседей есть рыцарь»?

7 класс

7.1. Существует ли четырехзначное натуральное число с различными ненулевыми цифрами, обладающее следующим свойством: если к нему прибавить это же число, записанное в обратном порядке, то получится число, делящееся на 101?

7.2. Имеется 9 карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Какое наибольшее количество этих карточек можно разложить в некотором порядке в ряд так, чтобы на любых двух соседних карточках одно из чисел делилось на другое?

7.3. Петя купил одно пирожное, два кекса и три бублика, Аня купила три пирожных и бублик, а Коля купил шесть кексов. Все они заплатили за покупки одинаковые суммы денег. Лена купила два пирожных и два бублика. А сколько кексов она могла бы купить на ту же потраченную ей сумму?

7.4. В классе 26 учащихся. Они договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо рыцарем (рыцари всегда говорят правду). Когда они пришли в класс и сели за парты, каждый из них сказал: «Я сижу рядом с лжецом». Затем некоторые учащиеся пересели за другие парты. Мог ли после этого каждый сказать: «Я сижу рядом с рыцарем»? Каждый раз за любой партой сидело ровно двое учащихся.

7.5. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 6×6 клеток так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Покрашенные уголки не должны перекрываться.)

8 класс

8.1. Найдите какие-нибудь четыре различных натуральных числа, обладающих следующим свойством: если к произведению любых двух из них прибавить произведение двух остальных чисел, то получится простое число.

8.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка K – середина AB, точка L – середина BC, точка M – середина CD, точка N – середина DA. Для некоторой точки S, лежащей внутри четырехугольника $ABCD$, оказалось, что $KS = LS$ и $NS = MS$. Докажите, что $\angle KSN = \angle MSL$.

8.3. Рабочие укладывали пол размера $n\times n$ плитками двух типов: 2×2 и 3×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

8.4. Сумма чисел a, b и c равна нулю, а их произведение отрицательно. Докажите, что число $\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}$ положительно.

8.5. На столе лежат 300 монет. Петя, Вася и Толя играют в следующую игру. Они ходят по очереди в следующем порядке: Петя, Вася, Толя, Петя, Вася, Толя, и т. д. За один ход Петя может взять со стола 1, 2, 3 или 4 монеты, Вася – 1 или 2 монеты, а Толя – тоже 1 или 2 монеты. Могут ли Вася и Толя договориться так, что, как бы ни играл Петя, кто-то из них двоих заберет со стола последнюю монету?

9 класс

9.1. За круглым столом сидят 10 человек, некоторые из них – рыцари, а остальные – лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Оба моих соседа – рыцари»? (Ложным считается утверждение, которое хотя бы частично не является верным.)

9.2. Пусть a и b – произвольные различные числа. Докажите, что уравнение $(x+a)(x+b)=2x+a+b$ имеет два различных корня.

9.3. Пусть AL – биссектриса остроугольного треугольника ABC, а ω – описанная около него окружность. Обозначим через P точку пересечения продолжения высоты BH треугольника ABC с окружностью ω. Докажите, что если $\angle BLA=\angle BAC$, то $BP=CP$.

9.4. Существует ли девятизначное число без нулевых цифр, остатки от деления которого на каждую из его цифр (первую, вторую, ..., девятую) различны?

9.5. Имеется таблица 11×11, из которой вырезана центральная клетка. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый игрок за ход ставит один крестик, а второй – один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A – количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B – количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. (При этом средняя строка считается одной строкой из 10 клеток, а средний столбец – одним столбцом из 10 клеток.) Первый выигрывает, если $A>B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

10 класс

10.1. Найдите все корни уравнения $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d)$, если известно, что $a+d=b+c=2015$ и $a\neq c$ (сами числа a, b, c, d не даны).

10.2. Вася выбрал некоторое число x и выписал последовательность $a_1=1+x^2+x^3$, $a_2=1+x^3+x^4$, $a_3=1+x^4+x^5$, ..., $a_n=1+x^{n+1}+x^{n+2}$, ... Оказалось, что $a_2^2=a_1a_3$. Докажите, что для всех $n\geq 3$ выполняется равенство $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$.

10.3. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 5×5 так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Закрашенные уголки не должны перекрываться.)

10.4. Назовем число, большее 25, *полупростым*, если оно является суммой каких-то двух различных простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел могут оказаться полупростыми?

10.5. Пусть AA_1 и CC_1 – высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, а K, L и M – середины сторон AB, BC и CA соответственно. Докажите, что если $\angle C_1MA_1=\angle ABC$, то $C_1K=A_1L$.

11 класс

11.1. Существует ли восьмизначное число без нулевых цифр, которое при делении на свою первую цифру дает остаток 1, при делении на вторую цифру дает остаток 2, ..., при делении на восьмую цифру дает остаток 8? Цифры считаются слева направо.

11.2. Уравнение $(x+a)(x+b)=9$ имеет корень $a+b$. Докажите, что $ab\leq 1$.

11.3. Рабочие укладывали пол размера $n\times n$ ($10<n<20$) плитками двух типов: 2×2 и 5×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

11.4. Середина ребра SA треугольной пирамиды $SABC$ равноудалена от всех вершин пирамиды. Пусть SH – высота пирамиды. Докажите, что $BA^2+BH^2=CA^2+CH^2$.

11.5. Существуют ли натуральные a и b, большие тысячи, такие, что для любого c, являющегося точным квадратом, три числа a, b и c не являются длинами сторон треугольника?

Решения задач

5 класс

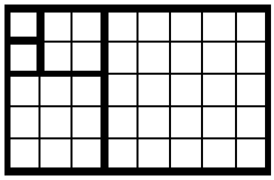
5.1. Ответ. На 24 секунды.

Раз Коля бегает в два раза медленнее Пети, то на прохождение дистанции он тратит вдвое больше времени. Значит, Коля пробежал дистанцию за 24 секунды, а Петя – за 12 секунд. Тогда Маша пробежала дистанцию за $12\cdot 3=36$ секунд и отстала от Пети на $36-12=24$ секунды.

5.2. Ответ. Например, 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

5.3. Ответ. Можно.

Пример показан на рисунке.



5.4. Ответ. Не мог.

Первое решение. Заметим, что изначально за столом сидело хотя бы 2 рыцаря – иначе нашлись бы 3 лжеца, сидящих рядом, и средний из них сказал бы правду, что невозможно. Так как есть рыцарь, сидящий за столом, то за столом сидят хотя бы два лжеца (рыцарь говорит правду). Поэтому, когда из-за стола кто-то ушел, за столом останется хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец.

Предположим, что после этого все сказали «Оба моих соседа – рыцари». Рассмотрим любого рыцаря, оставшегося за столом. Оба его соседа – рыцари; в частности, справа от него сидит рыцарь. Аналогично, справа от этого второго рыцаря сидит еще один рыцарь, и т. д. Получаем, что все люди за столом – рыцари. Но за столом остался лжец. Противоречие.

Второе решение. Рассмотрим любого человека из оставшихся. Если он рыцарь, то оба его соседа рыцари. Тогда он не мог сказать ранее, что оба его соседа лжецы, так как ушел не более, чем один его сосед. Значит, среди оставшихся все лжецы. Рассмотрим того, у кого сосед не уходил, тогда в начале он сказал правду. Противоречие.

5.5. Ответ. Не могло.

Предположим, что каждый участвовал по крайней мере в 9 эстафетах (не в качестве судьи). Всего прошло 10 эстафет. Это значит, что в качестве судьи каждый ученик участвовал не более одного раза. Посчитаем, сколько учеников участвовало в каждой эстафете в качестве судей. В первой эстафете (для групп по 4 ученика) в качестве судей участвовало 2 ученика. Во 2-й (по 5) – 0 учеников. В 3-й (по 6) – 0 учеников. В 4-й (по 7) – 2 ученика. В 5-й (по 8) – 6 учеников. В 6-й (по 9) – 3 ученика. В 7-й (по 10) – 0 учеников. В 8-й (по 11) – 8 учеников. В 9-й (по 12) – 6 учеников. В 10-й (по 13) – 4 ученика. То есть всего судейство осуществлялось $2+0+0+2+6+3+0+8+6+4=31$ раз. Но всего в классе 30 учеников, и если каждый судил не более одного раза, то количество судейств будет также не больше 30. Противоречие.

Замечание. Можно решить задачу и при помощи подсчета количества участий в эстафетах; это суммарное количество оказывается равным $269<9\cdot30$.

6 класс

6.1. Ответ. $A=89$ или $A=98$.

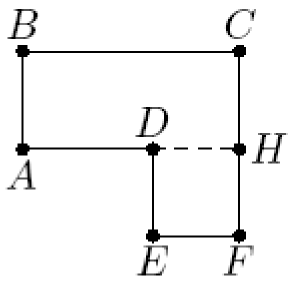
Подойдет $A=89$ или $A=98$. В обоих случаях $A+B=187=17\cdot11$.

6.2. Будем изменять слово КОРОБКА так: КОРОБКА → АКРОБКА → БАРОБКА → БАРОБАН → БАРБИАН → БАРАБАН.

Замечание. Возможны и другие последовательности операций, например: КОРОБКА → КОРОБАН → КОРББАН → КОБАБАН → КБРАБАН → БАРАБАН или же КОРОБКА → КОУРБКА → КОРАБКА → ОБРАБКА → БАРАБКА → БАРАБАН.

6.3. Ответ. 1 минуту.

Проведем отрезок DH, как показано на рисунке. Коля ездит в 1,2 раза быстрее Пети, поэтому ему на дорогу по маршруту $A-B-C$ потребовалось бы $12/1{,}2=10$ минут. Разность во времени $12-10=2$ минуты – это время, затраченное на движение по отрезку DE вниз и движение по отрезку FH вверх. Из равенства $DE=FH$ следует, что путь DE Петя преодолеет за 1 минуту.



6.4. Ответ. При n, делящихся на 6.

Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x+2x=6x=n^2$. Значит, n^2 должно делиться на 2 и на 3. Следовательно, n должно делиться на 2 и на 3, а поэтому и на 6.

Если же n делится на 6, то пол уложить можно. Достаточно заметить, что прямоугольник 2×3 выкладывается из двух плиток – по одной каждого вида. А квадрат $6k\times6k$ можно разрезать на прямоугольники 2×3.

6.5. Ответ. 8.

Заметим, что два лжеца не могут сидеть рядом (иначе каждый из них сказал бы правду). Значит, никакой лжец не может сказать вторую фразу.

С другой стороны, 3 рыцаря также не могут сидеть рядом (иначе средний солгал бы, говоря, что у него есть сосед-лжец). Значит, среди любых трех сидящих подряд есть лжец, то есть не более двух из них могут сказать вторую фразу. Разбивая сидящих на четыре тройки сидящих подряд, получаем, что не более $4\cdot2=8$ человек могли сказать вторую фразу.

Ровно 8 (рыцарей) из сидящих за столом могли сказать требуемую фразу, если за столом люди сидят в таком порядке: ЛРРЛРРЛРРЛРР.

7 класс

7.1. Ответ. Существует.

Подойдет, например, число 1234. Действительно, $1234+4321=5555=101\cdot55$.

7.2. Ответ. 8.

Заметим, что все 9 карточек положить в ряд требуемым образом не получится. Это следует из того, что у каждой из карточек с числами 5 и 7 может быть только один сосед – карточка с числом 1. Значит, обе карточки 5 и 7 должны лежать с краев, а карточка с единицей должна соседствовать с каждой из них, что невозможно.

Выбрать 8 карточек и разложить их в ряд согласно требованиям задачи можно, например, так: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

7.3. Ответ. 5 кексов.

Суммарная стоимость покупки Пети и Ани равна стоимости двух покупок Коли. Если обозначить x, y и z соответственно стоимости пирожного, кекса и бублика, то получаем равенство: $(x+2y+3z)+(3x+z)=12y$, откуда следует, что $4x+4z=10y$, то есть $2x+2z=5y$.

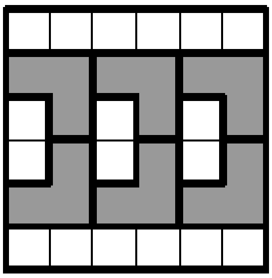
7.4. Ответ. Не мог.

Заметим, что фраза «Я сижу рядом со лжецом» могла быть произнесена только в том случае, когда за одной партой сидят лжец и рыцарь. Это означает, что в классе лжецов и рыцарей поровну – по 13. Фраза же «Я сижу рядом с рыцарем» могла быть произнесена только в том случае, когда за одной партой сидят либо два лжеца, либо два рыцаря. Но 13 – нечетное число, поэтому рассадить 13 лжецов и 13 рыцарей за парты так, чтобы за каждой партой сидели либо два лжеца, либо два рыцаря, не получится.

7.5. Ответ. 6.

Пусть клетки квадрата 6×6 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Тогда в каждом квадратике 2×2 покрашено хотя бы 2 клетки, иначе в этом квадратике можно покрасить уголок. Разбивая квадрат 6×6 на 9 квадратиков 2×2, получаем, что всего покрашено не меньше $9\cdot2=18$ клеток. Итак, покрашено не меньше 6 уголков.

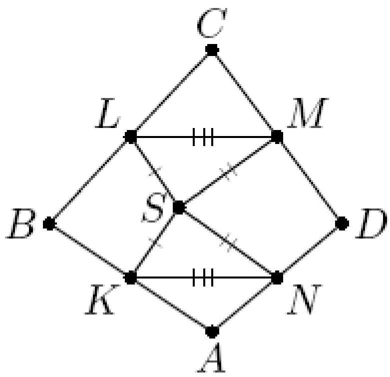
На рисунке показано, как покрасить 6 уголков, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.



8 класс

8.1. Подойдут, например, числа 1, 2, 3 и 5. Действительно, значения всех трех выражений $1\cdot 2+3\cdot 5=17$, $1\cdot 3+2\cdot 5=13$ и $1\cdot 5+2\cdot 3=11$ являются простыми числами.

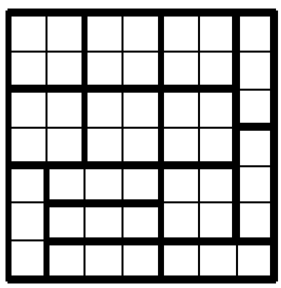
8.2. Заметим, что отрезок KN является средней линией треугольника BAD. Значит, $KN=\dfrac{BD}{2}$. Аналогично, из треугольника BCD получаем $LM=\dfrac{BD}{2}$. Но тогда треугольники KSN и MSL равны по трем сторонам (см. рис.). Отсюда следует требуемое равенство соответствующих углов.



8.3. Ответ. При n, делящихся на 7.

Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x+3x=7x=n^2$. Значит, n должно делиться на 7.

Если же n делится на 7, то пол уложить можно. Достаточно заметить, что квадрат 7×7 можно уложить, используя по 7 плиток каждого вида (см. рис.). А квадрат $7k\times 7k$ можно разрезать на квадраты 7×7.



8.4. Первое решение. Так как $abc<0$, то либо одно из чисел a,b,c отрицательно, либо все три. Но $a+b+c=0$, поэтому все три числа отрицательными быть не могут. Пусть, без ограничения общности, $a>0$, $b>0$ и $c<0$. Нам нужно доказать, что

$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>0$. Или $\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>-\frac{a^2+b^2}{c}=\frac{a^2+b^2}{a+b}$. Так как $a>0$ и $b>0$, то $\frac{b^2+c^2}{a}>\frac{b^2}{a}>\frac{b^2}{a+b}$. Аналогично, $\frac{c^2+a^2}{b}>\frac{a^2}{b}>\frac{a^2}{a+b}$. Сложив два полученных неравенства, получим требуемое.

Второе решение. Перепишем числитель первой дроби в виде $(a+b)^2-2ab=(-c)^2-2ab=c^2-2ab$. Тогда первую дробь можно преобразовать к виду $c-\frac{2ab}{c}$, а сумму дробей – к виду

$$\left(c-\frac{2ab}{c}\right)+\left(a-\frac{2bc}{a}\right)+\left(b-\frac{2ca}{b}\right)==(a+b+c)-2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)=-2abc\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Выражение в скобках положительно, а произведение abc, по условию, отрицательно, откуда и следует утверждение задачи.

Замечание. Можно заметить, что, если c отрицательно, а a и b положительны, то $|c|=a+b>a$. Поэтому $\frac{b^2+c^2}{a}>-\frac{b^2+a^2}{c}$; кроме того, $\frac{c^2+a^2}{b}>0$.

8.5. Ответ. Не могут.

Покажем, как играть Пете, чтобы он смог забрать со стола последнюю монету независимо от игры Васи и Толи. Пусть первым ходом Петя возьмет 4 монеты. Заметим, что Вася и Толя за свои ходы суммарно могут взять от 2 до 4 монет. Это значит, что после первого хода Толи на столе останется от 292 до 294 монет. После этого Пете нужно взять 2, 3 или 4 монеты так, чтобы на столе осталось 290 монет. А теперь, если Вася и Толя будут брать суммарно 2, 3 или 4 монеты, Пете нужно брать соответственно 3, 2 или 1 монету, чтобы после каждого его хода число монет, остающихся на столе, делилось на 5. Таким образом, он оставит 285, 280, …, 5 и, наконец, 0 монет, то есть заберет со стола последнюю монету.

9 класс

9.1. Ответ. 9.

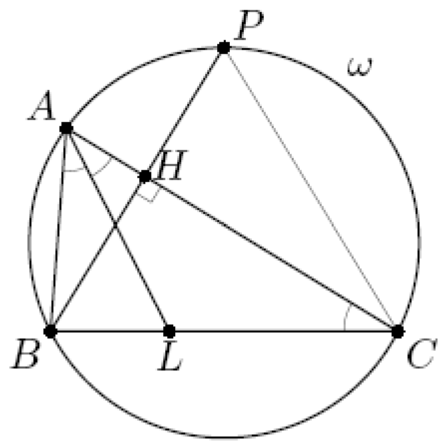
Заметим, что все 10 не могли сказать такую фразу. Так как за столом есть и рыцарь, и лжец, то найдутся лжец и рыцарь, сидящие рядом. Но тогда у этого рыцаря не оба соседа рыцари. Если же за столом сидит 9 лжецов и 1 рыцарь, то каждый из этих 9 лжецов мог сказать фразу «Оба моих соседа – рыцари», так как у каждого лжеца среди соседей есть лжец.

9.2. Первое решение. Перенесем все в левую часть: $(x+a)(x+b)-(2x+a+b)=0$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $x^2+(a+b-2)x+ab-a-b=0$. Посчитаем дискриминант получившегося квадратного уравнения. Он равен $D=(a+b-2)^2-4(ab-a-b)=a^2+b^2-2ab+4=(a-b)^2+4>0$. Значит, уравнение имеет два различных корня.

Второе решение. Рассмотрим приведенный квадратный трехчлен $f(x)=(x+a)(x+b)-(2x+a+b)$. То есть уравнение из условия эквивалентно $f(x)=0$. Заметим, что $f(-a)=a-b$ и $f(-b)=b-a$. Так как $a\neq b$, в одной из этих точек значение этого приведенного трехчлена отрицательно. Значит, у трехчлена есть ровно два корня.

9.3. Обозначим $\alpha=\angle BAL$. Тогда $\angle CAL=\alpha$, и, по условию, $\angle BLA=2\alpha$. Так как $\angle BLA$ – внешний в треугольнике ALC, получаем $\angle ACL=\angle BLA-\angle CAL=\alpha$ (см. рис.).

Из прямоугольного треугольника BHC теперь получаем $\angle CBH=90^\circ-\alpha$. Так как точка P лежит на ω, имеем $\angle BPC=\angle BAC=2\alpha$. Значит, $\angle PCB=180^\circ-\angle CBP-\angle BPC=180^\circ-(90^\circ-\alpha)-2\alpha=90^\circ-\alpha=\angle CBP$. Отсюда и следует, что треугольник PBC равнобедренный, $BP=CP$.



9.4. Ответ. Не существует.

Предположим, что требуемое число существует. Тогда у него все цифры различны, поскольку все остатки при делении на них различны. Значит, число состоит из цифр от 1 до 9, каждая использована по одному разу. Поэтому сумма его цифр равна 45. Но тогда оно делится и на 3, и на 9 (а также на 1), то есть имеет одинаковые (нулевые) остатки при делении на эти цифры. Противоречие.

9.5. Ответ. Выигрывает второй.

Заметим сначала, что в каждой строке и каждом столбце, кроме средних, по 11 клеток; поскольку число 11 нечётно, в каждом из этих рядов крестиков и ноликов не может быть поровну.

Приведем выигрышную стратегию для второго игрока. Каждым своим ходом ему следует ставить нолик в клетку, симметричную клетке, в которую только что поставил крестик первый игрок, относительно центра доски (понятно, что он всегда сможет так сделать). Покажем, что при такой стратегии количество строк, в которых больше крестиков, будет равно количеству столбцов, в которых больше ноликов.

Заметим, что все клетки таблицы (кроме центральной) разобьются на пары симметричных относительно центра, причём в каждой такой паре клеток будут стоять ровно один нолик и один крестик. Рассмотрим сначала среднюю строку таблицы. Центральная клетка (центр таблицы) вырезана. Остальные 10 клеток разбиваются на 5 пар симметричных. Это означает, что в них стоят 5 крестиков и 5 ноликов. Эта строка не даёт преимущества первому игроку. Аналогично, средний столбец не даёт преимущества второму игроку.

Рассмотрим теперь первую и последнюю строки таблицы. Их клетки образуют 11 пар симметричных клеток. Это означает, что в них суммарно стоит 11 крестиков и 11 ноликов. Значит, если в одной из этих строк больше крестиков, то в другой больше ноликов. Аналогичное утверждение можно доказать про остальные пары симметричных строк таблицы, а также про все пары симметричных столбцов. Итак, количество строк, в которых больше крестиков, будет равно 5, и количество столбцов, в которых больше ноликов, будет также равно 5. Поэтому $A = B = 5$, и второй выиграет.

10 класс

10.1. Ответ. $1007{,}5$.

Первое решение. Раскрыв скобки, получим $ab-(a+b)x = cd-(c+d)x$. Подставив $d = 2015-a$ и $b = 2015-c$, получаем $a(2015-c)-(a+2015-c)x = c(2015-a)-(c+2015-a)x$. Сократив и приведя подобные, получим $(a-c)2015 = 2(a-c)x$. Учитывая, что $a \neq c$, получаем $2x = 2015$, то есть $x = 1007{,}5$.

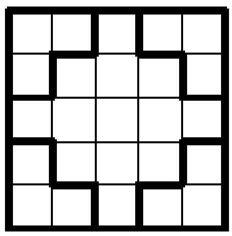
Второе решение. Поскольку $c = 2015 - b$ и $d = 2015 - a$, параболы $y = (x-a)(x-b)$ и $y = (x-c)(x-d)$ симметричны относительно прямой $x = 2015/2$. Значит, они пересекаются в точке, лежащей на этой прямой. Если бы эти параболы имели еще одну общую точку, то симметричная ей точка также лежала бы на обеих параболах, то есть наше уравнение имело бы как минимум три различных корня. Но тогда бы эти параболы совпадали. А это противоречит условию, так как в этом случае $a = d = 2015/2$ и $b = c = 2015/2 = a$.

10.2. Запишем равенство $a_2^2 = a_1 a_3$. Имеем: $(1+x^3+x^4)^2 = (1+x^2+x^3)(1+x^4+x^5)$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$. Преобразуем: $0 = x^5 + x^2 - x^4 - x^3 = x^2(x^3 + 1 - x^2 - x) = x^2(x-1)^2(x+1)$. Откуда либо $x = 0$, либо $x = -1$, либо $x = 1$. В первых двух случаях $a_n = 1$ для всех n, в третьем случае $a_n = 3$ для всех n. Во всех этих случаях выполняется требуемое равенство $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

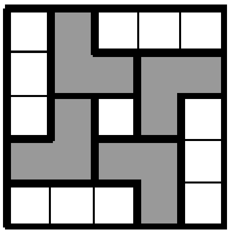
Замечание. После получения равенства $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$ можно действовать и по-другому. Раскрывая скобки в равенстве $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$ и приводя подобные слагаемые, получаем, что оно равносильно равенству $x^{n+2} + x^{n+1} = x^{n+3} + x^n$, которое получается из $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$ домножением на x^{n-2}.

10.3. Ответ. 4.

Пусть клетки квадрата 5×5 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Рассмотрим 4 уголка, отмеченных на рисунке. Так как ни один из этих уголков покрасить нельзя, то в каждом из них покрашено по крайней мере по одной клетке. Заметим, что одним уголком нельзя покрасить клетки двух отмеченных уголков. Значит, всего покрашено не меньше 4 уголков.



На следующем рисунке показано, как покрасить 4 уголка так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.



10.4. Ответ. 5.

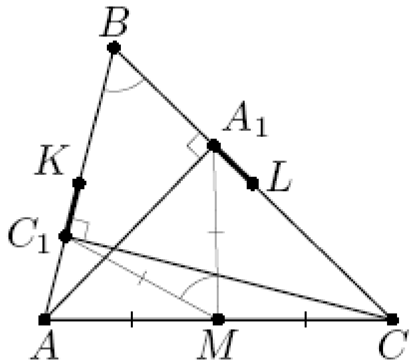
Заметим, что нечетное полупростое число может быть лишь суммой двойки и нечетного простого числа.

Покажем, что три подряд идущих нечётных числа $2n+1$, $2n+3$ и $2n+5$, больших 25, не могут быть полупростыми одновременно. Предполагая противное, получаем, что числа $2n-1$, $2n+1$ и $2n+3$ – простые, и все они больше 3. Но одно из этих трёх чисел делится на 3. Противоречие.

Заметим, что среди любых шести последовательных чисел есть три подряд идущих нечетных числа; значит, последовательных полупростых чисел не может быть больше пяти. Пять подряд идущих чисел могут быть полупростыми; например, $30=17+13$, $31=29+2$, $32=19+13$, $33=31+2$, $34=23+11$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

10.5. Отрезок C_1M является медианой прямоугольного треугольника CC_1A, поэтому $C_1M=\dfrac{AC}{2}=MA$ (см. рис.). Тогда $\angle C_1MA=\pi-2\angle BAC$. Аналогично, $\angle A_1MC=\pi-2\angle BCA$. Отсюда $\angle C_1MA+\angle A_1MC=2(\pi-\angle BAC-\angle BCA)=2\angle ABC$, а тогда $\angle A_1MC_1=\pi-(\angle AMC_1+\angle CMA_1)=\pi-2\angle ABC$.



Из условия следует, что $\angle ABC = \pi - 2\angle ABC$. Отсюда $\angle ABC = \dfrac{\pi}{3}$. По условию, треугольник ABC – не равнобедренный; пусть, например, $AB < BC$. Тогда из прямоугольного треугольника ABA_1 получаем $BA_1 = BA\cos(\pi/3) = AB/2$. Значит, $A_1L = BL - BA_1 = \dfrac{BC - AB}{2}$. Аналогично, $KC_1 = BC_1 - BK = \dfrac{BC - AB}{2} = A_1L$. Утверждение доказано.

11 класс

11.1. Ответ. Не существует.

Предположим, что такое число существует. Так как остатки при делении на 8 цифр – различные числа от 1 до 8, то цифры у восьмизначного числа различные.

Далее, если число дает остаток 8 при делении на цифру, то эта цифра – 9. Значит, последняя цифра числа равна 9. Аналогично, если число дает остаток 7 при делении на цифру, эта цифра – 8 или 9. Но 9 уже стоит на последнем месте; поэтому предпоследняя цифра – 8. Рассуждая аналогично, получим, что наше число может быть равно только 23456789. Однако это число, например, при делении на третью цифру (4) дает остаток 1, а не 3.

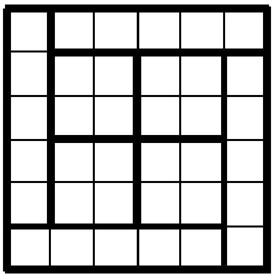
Замечание. Также число 23456789 даёт остаток 5 (а не 7) при делении на 8.

11.2. Подставив данный корень $x = a + b$ в уравнение, получаем равенство $(a+b+a)(a+b+b) = (2a+b)(2b+a) = 9$. Тогда $9 = 5ab + 2(a^2+b^2) \geq 5ab + 2\cdot 2ab = 9ab$, откуда $ab \leq 1$. (Мы использовали неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, которое эквивалентно $(a-b)^2 \geq 0$.)

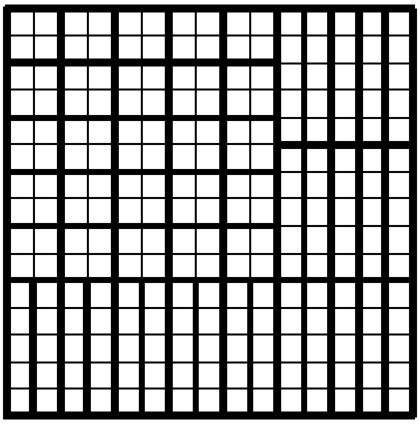
11.3. Ответ. 12, 15, 18.

Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x + 5x = 9x = n^2$. Значит, n^2 должно делиться на 9, то есть n должно делиться на 3. Таким образом, могут подойти лишь значения $n = 12$, $n = 15$ и $n = 18$.

Покажем, как уложить требуемые квадраты. Квадрат 6×6 можно уложить, использовав поровну плиток обоих типов (см. рис.). Так как квадраты 12×12 и 18×18 разрезаются на 6×6, то их также можно уложить требуемым образом.

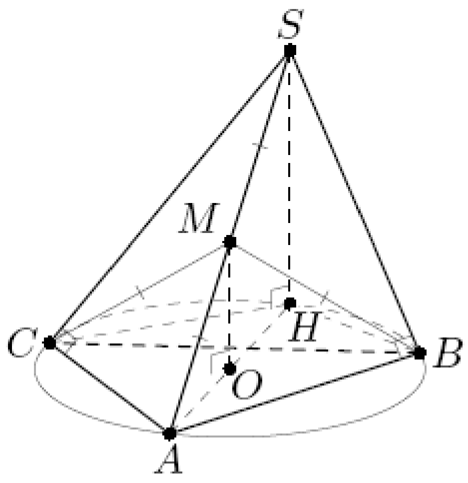


На следующем рисунке показано, как уложить квадрат 15×15, используя по 25 плиток каждого типа.



Замечание. Квадрат 18×18 можно разбить на прямоугольники 2×9, каждый из которых можно уложить, используя по 2 плитки каждого типа.

11.4. Первое решение. Пусть M – середина ребра SA. Так как $MA = MS = MC$, то в треугольнике ASC медиана MC в два раза больше стороны AS, к которой она проведена. Значит, треугольник ASC – прямоугольный с гипотенузой AS (см. рис.). Аналогично, треугольник ASB – прямоугольный с гипотенузой AS. Поэтому $AS^2 = BA^2 + SB^2 = CA^2 + SC^2$. Но $SC^2 = CH^2 + SH^2$ и $SB^2 = BH^2 + SH^2$. Подставив в предыдущее равенство, получим $BA^2 + BH^2 + SH^2 = CA^2 + CH^2 + SH^2$. Вычтя из обеих частей равенства SH^2, получим требуемое.



Второе решение. Пусть M – середина ребра SA, а точка O – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC. Тогда MO – средняя линия треугольника SAH, поэтому точка O – середина отрезка AH. Из равенства прямоугольных треугольников AMO, BMO и CMO с общим катетом OM и равными, по условию, гипотенузами AM, BM и CM, получаем, что $OA = OB = OC$. Значит, точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC, а тогда AH – диаметр этой окружности. Значит, углы ABH и ACH – прямые. Применив теорему Пифагора к треугольникам ABH и ACH, получаем утверждение задачи.

Замечание. Другое доказательство того, что $\angle ABS = \angle ACS = 90^\circ$, основано на том, что точка M является центром сферы, описанной около пирамиды, а тогда отрезок SA – диаметр этой сферы.

11.5. Ответ. Существуют.

Пусть, например, $a = 10000^2 + 10000$, $b = 1001$. Предположим, что существует $c = d^2$ такое, что числа a, b и c являются длинами сторон некоторого треугольника. Тогда должны выполняться неравенства треугольника $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$. Рассмотрим первые два из них: $a + b > c$ и $c > a - b$. Заметим, что $a + b = 10000^2 + 10000 + 1001 < 10000^2 + 10000 + 10000 + 1 = 10001^2$, и $a - b = 10000^2 + 10000 - 1001 > 10000^2$. Но тогда $10001^2 > a + b > c > a - b > 10000^2$, то есть $10001^2 > d^2 > 10000^2$. Это невозможно.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий муниципального этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы:

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В.,Кукина Е.Г.,Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н. ,Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006 – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.
Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). — М., МЦНМО, 2014.
Козлова Е. Г.. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.
Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 — 576 с.
Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/